XI. Espaces vectoriels - Applications linéaires

1 Espaces vectoriels

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. *On appelle* **loi externe** $.$ *sur un ensemble* E*, une application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda; x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$.

Exemple 1. *La multiplication par un scalaire est une loi externe sur* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ *et sur l'ensemble des suites réelles ou complexes.*

Définition 2. *On appelle* $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** *un ensemble* E *muni d'une* **loi interne** $+$ *telle que* $(E,+)$ *est un groupe commutatif (la loi* $+$ *est associative, commutative, admet un élément neutre, et tout élément de* E *admet un élément symétrique) et d'une* **loi externe** $.$ *telle que :*

- $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ *pour tout* $\overrightarrow{u} \in E$.
- $(\lambda\mu).\overrightarrow{u} = \lambda.(\mu.\overrightarrow{u})$ *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et pour tout* $\overrightarrow{u} \in E$.
- $\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et pour tous* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$.
- $(\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$ *pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et pour tout* $\overrightarrow{u} \in E$.

Remarque 1. *On appelle* **vecteur nul** *et on note* $\overrightarrow{0}$ *l'élément neutre de* E *pour la loi* $+$.

Exemple 2. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$ *et l'ensemble des suites réelles sont des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels.* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[X]$ *et l'ensemble des suites complexes sont des* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels.*

Propriété 1. *On considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, alors pour tout* $\overrightarrow{u} \in E$ *on a :*

- $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $(-1).\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$

Démonstration. Exigible - On calcule $\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u}$. □

Définition 3. *On considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E,+,.)$*, on dit que* $(F,+,.)$ *est un* **sous-espace vectoriel** *de* $(E,+,.)$ *si* $(F,+,.)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $F \subset E$.

Remarque 2. $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriels de* E.

Propriété 2. *On considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E,+,.)$ *alors* $(F,+,.)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(E,+,.)$ *si* $F \subset E$, $\overrightarrow{0} \in E$ *et si* F *est* **stable par combinaisons linéaires** *(pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et pour tous* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F$ *on a* $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$*).*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 1. *Montrer que* $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0 \right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*, le représenter graphiquement.*

Exercice 2. *Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 3. *L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré* 3 *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$ *?*

Propriété 3. *L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 4. *Montrer que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0 \right\}$ *et* $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0 \right\}$ *sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, repésenter graphiquement F, G et $F \cap G$.*

Exercice 5. *L'union de deux sous-espaces vectoriels de E est-il un sous-espace vectoriel de E ?*

Propriété 4. Somme de sous-espaces vectoriels
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\boxed{F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \ / \ \overrightarrow{u} \in F \text{ et } \overrightarrow{v} \in G\}}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 6. *On considère* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z = 0 \right\}$ *et* $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z = 0 \right\}$*, déterminer $F + G$, représenter graphiquement F, G et $F + G$.*

Définition 4. Somme directe de sous-espaces vectoriels
On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E, si pour tout $\overrightarrow{u} \in F + G$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \in F \times G$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ alors la somme $F + G$ est dite directe *et notée $F \oplus G$.*

Exercice 7. *Montrer que la somme de l'exercice 6 est directe.*

Propriété 5. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si* $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 5. Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Deux sous-espace vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires *si $F \oplus G = E$.*

Exercice 8. *Déterminer deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.*

Propriété 6. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
Si $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n)$ est une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs $\boxed{\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n) = \{\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \dots + \lambda_n \overrightarrow{u}_n \ / \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}}$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_n$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 3.

- *Pour $n = 0$, on convient que* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.
- *Pour $n = 1$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$,* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\lambda \overrightarrow{u} \ / \ \lambda \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **droite vectorielle** *engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.*
- *Pour $n = 2$ et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires,* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \ / \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ *est appelé* **plan vectoriel** *engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Exercice 9. *On considère les polynômes $P(X) = X^2 + X + 1$ et $Q(X) = 2X - 1$, déterminer une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une relation entre a, b et c pour que le polynôme $aX^2 + bX + c$ appartienne à* $\mathrm{Vect}(P, Q)$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 6. *Si $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ est une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n) = E$ *on dit qu'elle est* **génératrice** *de E, l'espace vectoriel E est alors dit de* **dimension finie**.

Exercice 10. *Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.*

Remarque 4. *Les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie.*

Définition 7. *Une famille de vecteurs est dite* **libre** *si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite* **liée**.

Remarque 5. *Comme* $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, *on convient que $(\overrightarrow{0})$ n'est pas une famille libre.*

Remarque 6. *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

Exercice 11. *Montrer que* $(\sin, \cos)$ *est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Propriété 7. *Une famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est libre si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \overrightarrow{u}_k = \overrightarrow{0}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ implique $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 12. *Montrer que $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.*

Propriété 8. *On considère une famille $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ de n vecteurs génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors toute famille libre de E est formée d'au plus n vecteurs.*

Démonstration. Exigible dans le cas $n = 1$ ou $n = 2$ - On montre qu'une famille de $n + 1$ vecteurs est liée. □

Propriété 9. *On considère une famille libre $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \ldots, \overrightarrow{u}_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors toute famille génératrice de E est formée d'au moins n vecteurs.*

Démonstration. Exigible - On raisonne par l'absurde et on utilise la propriété 8. □

Définition 8. *On appelle* **base** *d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie une famille libre et génératrice de E.*

Exercice 13. *Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ puis de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Propriété 10. *Deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*

Démonstration. Exigible - On utilise les propriétés 8 et 9. □

Théorème 1. Théorème de la base incomplète
On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors :
- *de toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.*
- *toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.*

Démonstration. Procédé exigible. □

Corollaire 1. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs appelé* **dimension** *de l'espace vectoriel E et noté* $\dim E$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 7. *On a* $\dim\left(\left\{\overrightarrow{0}\right\}\right) = 0$.

Exemple 3. $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base dite* **base canonique** *de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4. $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$ *est une base dite* **base canonique** *de l'ensemble* $\mathbb{R}_n[X]$ *des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.*

Corollaire 2. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n alors :*
- *toute famille de n vecteurs génératrice de E est une base de E.*
- *toute famille libre de n vecteurs est une base de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Montrer que* $\left(\overrightarrow{e}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{e}_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

Propriété 11. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ *alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tels que* $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \overrightarrow{e}_k$, *les scalaires λ_k pour $k \in [\![1; n]\!]$ sont appelés* **coordonnées** *du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Exigible - On utilise le fait que $\mathcal{B}$ est génératrice et libre. □

Exercice 15. *Déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Exercice 16. *Montrer que* $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3)$ *est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X^3 - 1$ dans cette base.*

3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété 12. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et* $\dim F \leqslant \dim E$ *de plus* $\dim F = \dim E$ *si et seulement si $E = F$.*

Démonstration. Exigible - On remarque qu'une famille libre de F est une famille libre de E. □

Définition 9. *On appelle* **rang** *d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel engendré par celle-ci, on note* $\mathrm{rg}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) = \dim(\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}))$.

Exercice 17. *Déterminer le rang de la famille de vecteurs* $\left(\overrightarrow{u}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u}_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Propriété 13. *Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème de la base incomplète. □

Remarque 8. *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

Exercice 18. *Déterminer un supplémentaire de* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 0 \right\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2. formule de Grassmann
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors $F + G$ est de dimension finie et $\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$.

Démonstration. Exigible - On complète une base de $F \cap G$ en une base de F puis en une base de G et on montre que la famille formée par l'ensemble des vecteurs de ces bases est une base de $F + G$. □

Corollaire 3. *Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont supplémentaires si et seulement si* $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 9. *On a également F et G supplémentaires si et seulement si $F + G = E$ et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

4 Applications linéaires

Définition 10. *On dit qu'une application $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est* **linéaire** *si pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Remarque 10. *Si f est linéaire, $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.*

Remarque 11. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 5. *Une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{K}$ est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & k\overrightarrow{u} \end{array}$$

Exemple 6. *La dérivation est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Exercice 19. *Montrer que l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ *est linéaire.*

Définition 11.
- *Une application linéaire de E dans E est appelée un* **endomorphisme**, *on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une* **forme linéaire**.

Exercice 20. *Donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un exemple de forme linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 21. *L'application $f \mapsto f \circ f$ est-elle un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

Propriété 14. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 12. *Une application linéaire bijective est appelée un* **isomorphisme**.

Propriété 15. *L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 13. *Un endomorphisme bijectif est appelé un* **automorphisme**.

Exercice 22. *Montrer que l'application f de l'exercice 19 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et expliciter son application réciproque.*

Propriété 16. *L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un groupe pour la loi $\circ$ appelé* **groupe linéaire** *et noté $\mathrm{GL}(E)$.*

Démonstration. Exigible. □

Définition 14. *On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
- *on appelle* **noyau** *de f,* $\boxed{\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0_F}\right\}\right) = \left\{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}\right\}}$.
- *on appelle* **image** *de f,* $\boxed{\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(\overrightarrow{u}) \ / \ \overrightarrow{u} \in E\}}$.

Exercice 23. *Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Exercice 24. *Déterminer le noyau et l'image de la forme linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x + y + z \end{array}$.

Propriété 17. *On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.*

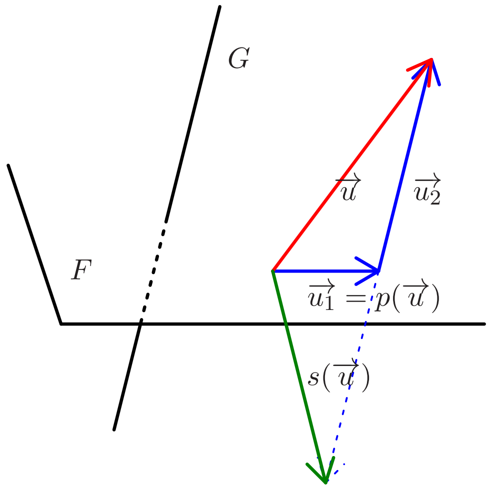
Démonstration. Exigible. □

Propriété 18. *On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors :*
- *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.
- *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 15. *On considère deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \in F \times G$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$:*

- *l'application linéaire $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_1} \end{array}$ est appelée* **projection** *(ou* **projecteur***) sur F parallèlement à G,*
- *l'application linéaire $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \end{array}$ est appelée* **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G.*



Remarque 12. *p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$, $s \circ s = Id$ donc s est un automorphisme d'application réciproque s.*

Exemple 7. *L'application linéaire $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est une projection.*

Exemple 8. *L'application linéaire $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ est une symétrie.*

Exercice 25. *On considère p projection sur F parallèlement à G, déterminer* $\operatorname{Ker} p$ *et* $\operatorname{Im} p$.

Exercice 26. *On considère s symétrie par rapport à F parallèlement à G, déterminer* $\operatorname{Ker}(s - Id)$ *et* $\operatorname{Ker}(s + Id)$.

Propriété 19. *Un endomorphisme p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $p \circ p = p$ est une projection sur* $\operatorname{Im} p$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker} p$.

Démonstration. Exigible - On utilise la décomposition $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}))$. □

Propriété 20. *Un endomorphisme s d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $s \circ s = Id$ est une symétrie par rapport à* $\operatorname{Ker}(s - Id)$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker}(s + Id)$.

Démonstration. Exigible - On utilise la décomposition $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} + s(\overrightarrow{u})) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{u} - s(\overrightarrow{u}))$. □

5 Applications linéaires en dimension finie

Propriété 21. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est entièrement déterminée par l'image $(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), \ldots, f(\overrightarrow{e}_n))$ d'une base quelconque $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ de E.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 27. *Déterminer l'application linéaire f telle que $f(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$ et $f(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1$ où $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Définition 16. *On appelle* **rang** *d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie,* $\boxed{\text{rg } f = \dim(\text{Im } f)}$.

Remarque 13. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec* $\dim E = \dim F$ *est surjective si et seulement si* $\text{rg } f = \dim F$.

Théorème 3. **Théorème du rang**
On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\text{rg } f = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$$

Démonstration. Hors-programme - On montre que f définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans $\text{Im } f$. □

Exercice 28. *Déterminer le rang de l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{array}$.

Remarque 14. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, nécessairement* $\dim E = \dim F$.

Corollaire 4. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec* $\dim E = \dim F$, *alors :*

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 29. *Montrer que* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \mapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Exercice 30. *Montrer que* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$ *est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

6 Hyperplans

Définition 17. *On appelle* **hyperplan** *d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Exemple 9. *Dans $\mathbb{R}^3$ les hyperplans sont les plans vectoriels, dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont les droites vectorielles.*

Propriété 22. *Une partie H d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{K}$. L'équation $f(\overrightarrow{u}) = 0$ est appelée une* **équation cartésienne** *de l'hyperplan H.*

Démonstration. Exigible - Pour le sens direct, on complète une base de H en une base de E et on définit $f(\overrightarrow{u})$ comme la dernière coordonnée de $\overrightarrow{u}$ dans cette base ; pour la réciproque, on utilise le théorème du rang. □

Exercice 31. *Déterminer une base de* Ker f *où* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & a+b+c \end{array}$.

Exercice 32. *Déterminer une équation cartésienne de l'hyperplan* $H = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.